Cvičení ze stochastické analýzy

3. Itôova formule pro C^2-funkce

Následující poznámka říká, že v definici integrálu v Riemanově smyslu se můžeme omezit na taková tokálně konečná dělení, která zjemňují předem dané lokálně konečné dělení $0 \in S \subseteq [0,\infty)$.

Poznámka: Měj H lokálně omezené trajektorie. Pokud existuje limita $\oint H_{\lfloor t\rfloor_T-}\,\mathrm{d}X_t$ pro $S \subseteq T \uparrow [0,\infty)$, pak existuje odpovídající Riemanův integrál $\int H\,\mathrm{d}X$ a přirozeně je této limitě skoro jistě roven.

Důkaz: Buď $0 \in R \uparrow [0,\infty)$ a označme $S \subseteq T := R \cup S = \{0 = t_0 < \ldots < t_k; k \in N\}$. Pak

$$t = \lfloor s\rfloor_T \neq \lfloor s\rfloor_R = r \quad \Rightarrow \quad S \ni t = t_{k-1} < r \leq t_k$$

pro nějaké k. Protože $\{k : v \geq t_{k-1} \in S\}$ je konečná a X je spojitý proces, máme pro $S \subseteq T \uparrow [0,\infty)$, že

$$|\oint (H_{\lfloor s\rfloor_T-} - H_{\lfloor s\rfloor_R-})\,\mathrm{d}X_s|_v^* \leq 2|H|_v^* \cdot \textstyle\sum_k |X_{v\wedge t_k} - X_{v\wedge t_{k-1}}| \cdot 1_{[v\geq t_{k-1}\in S]} \to 0. \qquad \textbf{\textit{Q.E.D.}}$$

Podobně lze ukázat, že integrál v Riemanově smyslu je konzistentní s elementárním integrálem.

Poznámka: Je-li $H \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)}$ jednoduchý proces a $X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$, pak $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}X_s \overset{\text{sj}}{=} \oint_0^t H_s\,\mathrm{d}X_s$.

Důkaz: Buď $0 \in S \subseteq [0,\infty)$ dělící množina jednoduchého procesu H a buď $S \subseteq T \subseteq [0,\infty)$. Pak

$$|\oint (H_s - H_{\lfloor s\rfloor_T-})\,\mathrm{d}X_s|_t^* \leq |H_s - H_{\lfloor s\rfloor_T-}|_t^* \cdot \textstyle\sum_k |X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}}| \cdot 1_{[t\geq t_{k-1}\in S]} \to 0, \quad S \subseteq T \uparrow [0,\infty),$$

neboť $\{k : t \geq t_{k-1} \in S\}$ je konečná a X je spojitý. ***Q.E.D.***

- Nechť $X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ má kvadratickou variaci $\langle X\rangle$ a $Y \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ měj lokálně konečnou variaci. Ukažte, že $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ má tenzorovou kvadratickou variaci a spočtěte ji. Ukažte, že pak
$$X_tY_t \overset{\text{sj}}{=} X_0Y_0 + \textstyle\int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s.$$
- Spočtěte první dva momenty včetně autokovarianční struktury následujícího procesu $\int s\,\mathrm{d}W_s$ a rozhodněte, zda je gausovský.
- Spočtěte první dva momenty včetně autokovarianční struktury následujícího procesu $\int W_s\,\mathrm{d}W_s$ a rozhodněte, zda je gausovský.

Pro $H \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ budeme užívat ***diskrétní modul spojitosti***

$$|\boldsymbol{dH_T}|_t^* = \sup\{|H_s - H_{\lfloor s\rfloor_T}|; s \in [0,t]\} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t^H)$$

odpovídající lokálně konečnému dělení $0 \in T \subseteq [0,\infty)$. Zřejmě pak $|\mathrm{d}H_T|_t^* \to 0$ pro $T \uparrow [0,\infty), t \geq 0$.

Poznámka: Nechť $H, X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$. Pokud navíc X má trajektorie s lokálně konečnou variací, pak stochastický integrál v Riemanově smyslu odpovídá klasickému integrálu po trajektoriích v Lebesgue-Stieltjesově smyslu, který budeme značit také $\int H\,\mathrm{d}X$.

Důkaz: Protože elementární integrál je konzistení s Lebesgue-Stieltjesovým po trajekoriích, máme

$$|\oint H_{\lfloor s\rfloor_T-}\,\mathrm{d}X_s - \textstyle\int H_s\,\mathrm{d}X_s|_t^* = |\int (H_{\lfloor s\rfloor_T-} - H_s)\,\mathrm{d}X_s|_t^* \leq |\mathrm{d}H_T|_t^* \cdot \int_0^t |\,\mathrm{d}X_s| \to 0, \quad T \uparrow \mathbb{R}^+,$$

neboť $|\mathrm{d}H_T|_t^* \to 0$, kde $\boldsymbol{\int_0^t |dX|}$ je ***průběžná totální variace*** procesu X. ***Q.E.D.***

Lemma Nechť $H, X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ a nechť X má kvadratickou variaci $\langle X\rangle$, pak

$$\textstyle\oint_0^t H_{\lfloor s\rfloor_T-}\,\mathrm{d}[X]_s^T \rightsquigarrow \int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s \quad \text{pro} \quad T \uparrow \mathbb{R}^+.$$

Důkaz: Buďte $0 \in S \subseteq T$ lokálně konečná dělení $[0,\infty)$. Budeme vycházet z rovnosti

$$\oint H_{\lfloor s\rfloor_T-}\,\mathrm{d}[X]_s^T = \oint (H_{\lfloor s\rfloor_T-} - H_{\lfloor s\rfloor_S-})\,\mathrm{d}[X]_s^T + \oint H_{\lfloor s\rfloor_S-}[\,\mathrm{d}[X]_s^T - \mathrm{d}\langle X\rangle_s] + \textstyle\int (H_{\lfloor s\rfloor_S-} - H_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s + \int H_s\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s.$$

Protože $\rho(Z) \triangleq \sum_k 2^{-k} \wedge |Z|_k^*$ je monotoní v $Z \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$, budeme moci využít následující nerovnosti

$$|\oint (H_{\lfloor s\rfloor_T-} - H_{\lfloor s\rfloor_S-})\,\mathrm{d}[X]_s^T|_t^* \leq |H_{\lfloor s\rfloor_T-} - H_{\lfloor s\rfloor_S-}|_t^* \cdot [X]_t^T \leq |\,\mathrm{d}H_S|_t^* \cdot [X]_t^T.$$

Protože je druhý člen napravo výchozí rovnosti zanedbatelný pro $S \subseteq T \uparrow \mathbb{R}^+$ a třetí pro $S \uparrow \mathbb{R}^+$, platí

$$\overline{\lim_{T\uparrow\mathbb{R}^+}}\ \rho(\oint H_{\lfloor s\rfloor_{T-}}\,\mathrm{d}[X]^T_s, \int H_s\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s) \leq \overline{\lim_{S\uparrow\mathbb{R}^+}}\ \limsup_{S\subseteq T\uparrow\mathbb{R}^+} \rho(|\,\mathrm{d}H_S|^*_t \cdot [X]^T_t) = \overline{\lim_{S\uparrow\mathbb{R}^+}}\ \rho(|\,\mathrm{d}H_S|^*_t \cdot \langle X\rangle_t) = 0,$$

kde $\overline{\lim}$ operativně pro úspornost a mírnou přehlednost nahrazuje symbol $\limsup$. ***Q.E.D.***

Důsledek: Je-li $H \in \mathbb{C}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{r\times d}$ a $X \in \mathbb{C}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{d\times m}$, pak

$$\oint_0^t H_{\lfloor s\rfloor_{T-}}\,\mathrm{d}[\![X]\!]^T_s \rightsquigarrow \int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_s \quad \text{pro} \quad T \uparrow \mathbb{R}^+.$$

Důkaz: Operativně a poněkud svérázně zde přeznačíme vektor i-tou a j-tou složku vektoru z $(X^i, X^j)^\intercal$ na vektor $(X, Y)^\intercal$. Pro jednorozměrný proces H dle předchozího lemmatu dle polarizační rovnosti pak platí

$$\begin{aligned}\oint_0^t H_{\lfloor s\rfloor_{T-}}[X,Y]^T_s &= \tfrac{1}{4}\oint_0^t H_{\lfloor s\rfloor_{T-}}\,\mathrm{d}[X+Y]^T_s - \tfrac{1}{4}\oint_0^t H_{\lfloor s\rfloor_{T-}}\,\mathrm{d}[X-Y]^T_s \\ &\rightsquigarrow \tfrac{1}{4}\int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle X+Y\rangle_s - \tfrac{1}{4}\int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle X-Y\rangle_s \overset{\text{sj}}{=} \int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle X,Y\rangle_s.\end{aligned}$$

Požadované tvrzení důsledku pak dostaneme po souřadnicích nasčítáním výše dokázaného pro složky vektorů X a H. ***Q.E.D.***

Poznámka: Je-li $g \in C^2[a,b]$, pak

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + \tfrac{1}{2}g''(a)(b-a)^2 + \int_a^b\int_a^x (g''(y) - g''(a))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Itôova formule Buď $X = (X^1, \ldots, X^d)^\intercal$ d-rozměrný spojitý reálný proces s tenzorovou variací $\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ a $f \in C^2(K)$, kde K je konvexní obal obrazu $\operatorname{rng} X = \{X_t(\omega); \omega \in \Omega, t \in [0,\infty)\}$ procesu X. Pak

$$\begin{aligned}\boxed{\mathrm{d}f(X_t) = \nabla f(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}X_t)^\intercal\nabla^2 f(X_t)\,\mathrm{d}X_t} \\ = \nabla f(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}[\nabla^2 f(X_t)\,\mathrm{d}\langle\!\langle X\rangle\!\rangle],\end{aligned}$$

což lze pro $d = 1$ psát jednoduše ve tvaru

$$\boxed{\mathrm{d}f(X_t) = f'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}f''(X_t)(\mathrm{d}X_t)^2}$$

a pro $d = 2$ při přeznačení na $\mathbb{X} = (X,Y)^\intercal$ ve tvaru

$$\mathrm{d}f(\mathbb{X}) = f''_1(\mathbb{X}_t)\,\mathrm{d}X_t + f'_2(\mathbb{X}_t)\,\mathrm{d}Y_t + \tfrac{1}{2}f''_{11}(\mathrm{d}X_t)^2 + f''_{12}(\mathbb{X})(\mathrm{d}X_t)(\mathrm{d}Y_t) + \tfrac{1}{2}f''_{22}(\mathbb{X}_t)(\mathrm{d}Y_t)^2.$$

Důkaz Itôovy formule: Buď $T = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k; k \in \mathbb{N}\}$ lokálně konečné dělení. Označme

$$x^{(k)}_u = u \cdot t \wedge t_{k-1} + (1-u)\cdot t\wedge t_k, \quad y^{(k)}_u = u \cdot X_{t\wedge t_{k-1}} + (1-u)\cdot X_{t\wedge t_k}$$

parametrizaci k-té lineární části polygonu definovaného do času $t \geq 0$ předpisem

$$X_{T,t}(s) = y_k(u), \quad \text{pokud} \quad x_k(u) = s \leq t.$$

vytyčeného body $(t\wedge t_k, f(X_{t\wedge t_k}(\omega))) \in K; k \in \mathbb{N}_0$. Z předpokladu $f \in C^2(K)$ pak dostaneme, že také

$$f \in C^2\{(x^{(k)}_u, y^{(k)}_u(\omega)); u \in [0,1], k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}.$$

Na každém úseku této lomené čáry rozvineme funkci f do Taylorova polynomu druhého řádu, přičemž tato aproximace bude ospravedlněna následující zanedbatelností (vícerozměrného) zbytku

(1) $$|\,\mathrm{d}\nabla^2 f(X_T)_T|^*_t = \sup\{|\nabla^2 f(y_k(u)) - \nabla^2 f(y_k(0))|; k \in \mathbb{N}, u \in [0,1]\} \to 0, \qquad T \uparrow [0,\infty).$$

Zřejmě $g_k = f \circ y_k \in C^2[0,1]$. Z Taylorovy věty druhého řádu s integrálním tvarem zbytku pak dostaneme

$$f(X_{t\wedge t_k}) - f(X_{t\wedge t_{k-1}}) = g_k(1) - g_k(0) = g'_k(0) + \tfrac{1}{2}g''_k(0) + \int_0^1\int_0^v [g''_k(u) - g''_k(0)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

přičemž $g'_k(0) = \nabla f(X_{t_{k-1}})^\intercal(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})$ a dále

$$g''_k(0) = (X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})^\intercal\nabla^2 f(X_{t_{k-1}})(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}}) = \mathrm{tr}[\nabla^2 f(X_{t\wedge t_{k-1}})(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})^{\odot 2}].$$

Nasčítáním pak dostaneme rovnost

$$f(X_t)-f(X_0)=\oint_0^t\nabla f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})^{\mathsf T}\,\mathrm dX_s+\tfrac12\oint_0^t\mathrm{tr}[\nabla^2 f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})\,\mathrm d[\![X_s]\!]^T] \tag{2}$$

$$+\textstyle\sum_k\mathrm{tr}\{\int_0^1\int_0^v[\nabla^2 f(y_k(u))-\nabla^2 f(y_k(0))]\,\mathrm du\,\mathrm dv\cdot(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^{\odot 2}\}. \tag{3}$$

Odhad Taylorova zbytku pak dostaneme ve tvaru

$$\mathrm{tr}\,|\textstyle\int_0^1\int_0^v[\nabla^2 f(y_k(u))-\nabla^2 f(y_k(0))]\,\mathrm du\,\mathrm dv\cdot(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^{\odot 2}|\le\tfrac12\,\mathrm{tr}|\,\mathrm d\nabla^2 f(X_T)_T|_t^*\cdot(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^2,$$

přičemž pak poslední člen v (3) ze shora můžeme v absolutní hodnotě odhadnout hodnotou

$$\tfrac12\,\mathrm{tr}|\,\mathrm d\nabla^2 f(X_T)_T|_t^*\cdot\textstyle\sum_k(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^2=\tfrac12\,\mathrm{tr}\,|\,\mathrm d\nabla^2 f(X_T)_T|_t^*\cdot[X]_t^T\rightsquigarrow 0,$$

pro $T\uparrow[0,\infty)$, přičemž využíváme zanedbatelnosti (1) a následující asymptotické vlastnosti

$$[X]_t^T=\textstyle\sum_k(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^2=\mathrm{tr}[\![X]\!]_t^T=\mathrm{tr}\sum_k(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^{\odot 2}\rightsquigarrow\mathrm{tr}\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_t=\langle X\rangle_t.$$

Protože dle výše uvedeného důsledku dále platí

$$\oint_0^t\mathrm{tr}[\nabla^2 f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})\,\mathrm d[\![X_s]\!]^T]=\mathrm{tr}\{\oint_0^t\nabla^2 f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})\,\mathrm d[\![X_s]\!]^T\}\rightsquigarrow\mathrm{tr}\{\textstyle\int_0^t\nabla^2 f(X_s)\,\mathrm d\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_s\},$$

s využitím zanedbatelnosti nasčítaných Taylorových zbytků dostáváme, že existuje limita

$$\int_0^t\nabla f(X_s)^{\mathsf T}\,\mathrm dX_s=\lim_{T\uparrow\mathbb R^+}\oint_0^t\nabla f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})\,\mathrm dX_s\overset{\mathrm{sj}}{=}f(X_t)-f(X_0)-\lim_{T\uparrow\mathbb R^+}\tfrac12\oint_0^t\mathrm{tr}[\nabla^2 f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})\,\mathrm d[\![X_s]\!]^T]$$

$$\overset{\mathrm{sj}}{=}f(X_t)-f(X_0)-\tfrac12\mathrm{tr}\{\textstyle\int_0^t\nabla^2 f(X_s)\,\mathrm d\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_s\}.$$

Q.E.D.

Dodatek: Nechť jsou splněny předpoklady Itôovy formule nebo modifikované verze postupně pro $f_1,\dots,f_m$ d-proměnných. Označme příslušnou vektorovou funkci $f=(f_1,\dots,f_m)^{\mathsf T}\in\mathbb R^m$. Pak proces $Y_t=f(X_t)$ má tenzorovou kvadratickou variaci

$$\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle_t=\langle\!\langle\textstyle\int\nabla f(X_s)^{\mathsf T}\,\mathrm dX_s\rangle\!\rangle_t=\int_0^t\nabla f(X_s)^{\mathsf T}\,\mathrm d\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_s\nabla f(X_s),\quad\text{kde}\quad\nabla f(X_s)_{ij}=(\tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_s))_{ij=1}^{d,m}\in\mathbb L^{d\times m},$$

což by se dalo v diferenciální symbolice zapsat ve tvaru

$$\boxed{\mathrm d\langle\!\langle\textstyle\int\nabla f(X_s)^{\mathsf T}\,\mathrm dX_s\rangle\!\rangle_t=\mathrm d\langle\!\langle Y\rangle\!\rangle_t=\mathrm dY_t\,\mathrm dY_t^{\mathsf T}=\nabla f(X_t)^{\mathsf T}\,\mathrm d\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_t\nabla f(X_t)}.$$

Speciálně pak dostaneme

$$\langle Y\rangle_t=\langle\textstyle\int\nabla f(X)^{\mathsf T}\mathrm dX\rangle_t=\mathrm{tr}\int_0^t\nabla f(X_s)\nabla f(X_s)^{\mathsf T}\,\mathrm d\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_s.$$

Důkaz: Podobně jako v důkazu Itôovy formule vyjádříme přírůstek

$$f(X_{t\wedge t_k})-f(X_{t\wedge t_{k-1}})=[\nabla f(X_{t_{k-1}}))+\mathbb O(\|\,\mathrm d\nabla f(X_T)_T\|_t^*)]^{\mathsf T}(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}}),$$

kde $a=\mathbb O(b)$ znamená, že $|a|\le|b|$. Pak pro $T\uparrow[0,\infty)$ při $\rightsquigarrow$ konvergenci platí

$$[\![f(X)]\!]_t^T=\textstyle\sum_k[\nabla f(X_{t_{k-1}}))+\mathbb O(\|\,\mathrm d\nabla f(X_T)_T\|_t^*)]^{\mathsf T}(X_{t\wedge t_k}-X_{t\wedge t_{k-1}})^{\odot 2}[\nabla f(X_{t_{k-1}}))+\mathbb O(\|\,\mathrm d\nabla f(X_T)_T\|_t^*)]$$

$$=\oint_0^t\nabla f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})^{\mathsf T}\,\mathrm d[\![X]\!]_s^T\,\nabla f(X_{\lfloor s\rfloor_T-})+[X]_t^T\cdot o(1).$$

Zbytek dostaneme limitním přechodem $T\uparrow[0,\infty)$ s tím, že spojité procesy lišící se o proces s lokálně konečnou variací mají zřejmě stejnou kvadratickou variaci. ***Q.E.D.***

- Buď W_t Wienerův proces. Ukažte, že proces $X_t=\exp\{\sigma W_t+(\mu-\frac12\sigma^2)t\}$ řeší SDE
$$\mathrm dX_t=\mu X_t\,\mathrm dt+\sigma X_t\,\mathrm dW_t,\quad Y_0=1.$$
- Buď Wienerův proces. Ukažte, že proces $Y=e^{-bt}\int_0^t e^{bs}\,\mathrm dW_s$ řeší SDE $\mathrm dY_t=-bY_t\,\mathrm dt+\mathrm dW_t$.
- Buď Wienerův proces. Ukažte, že procesy $X_t=\sin W_t, Y_t=\cos W_t$ řeší soustavu SDE
$$\mathrm dX_t=-\tfrac12\,X_t\,\mathrm dt+Y_t\,\mathrm dW_t$$
$$\mathrm dY_t=-\tfrac12\,Y_t\,\mathrm dt-X_t\,\mathrm dW_t.$$
- Nechť proces $(X,Y)^{\mathsf T}$ má tenzorovou kvadratickou variaci a řeší SDE $\mathrm dX_t=-Y_t\,\mathrm dW_t$, $\mathrm dY_t=X_t\,\mathrm dW_t$ s $X_0=x_0, Y_0=y_0$. Ukažte, že pak proces $R_t=\sqrt{X_t^2+Y_t^2}$ je deterministický.